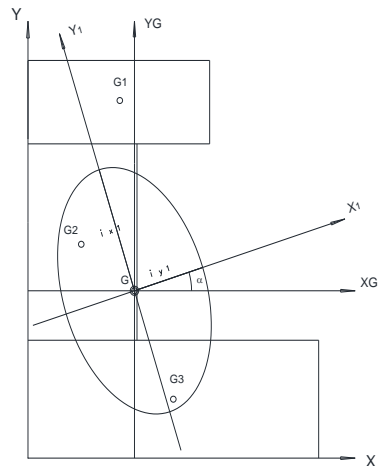


LA PREMESSA

Carl Culmann, ingegnere tedesco, vissuto nel secolo XIX, elabora, tra le diverse teorie a lui attribuite, quella della variabilità inerziale di sistemi di masse e di aree: questa si traduce in un comportamento “ciclico” che vede valori crescenti fino ad un massimo e successivamente decrescenti fino ad un minimo, per poi crescere ancora, e così via.

L'ELLISSE CENTRALE DI INERZIA O DI CULMANN sintetizza, dunque, il comportamento inerziale di qualsiasi sistema di masse o sezioni piane, che ruotando, assumono caratteristiche di resistenza meccanica sempre diverse, ciclicamente crescenti e decrescenti.

La costruzione della figura è data, punto per punto, dal RAGGIO DI INERZIA determinabile attraverso la radice quadrata del rapporto tra MOMENTO DI INERZIA e l'AREA della sezione esaminata: si tratta di una esemplificazione logica per poter rappresentare nel piano un'entità sovradimensionale (il momento di inerzia viene, infatti, nelle sezioni piane, espresso in unità di misura spaziale alla quarta potenza).



L'INTUIZIONE

L'Intuizione, come spesso succede, nasce dalla pratica, ovvero come nel caso specifico, dalle esercitazioni didattiche.

Piccole differenze nei risultati nelle cosiddette “verifiche inverse” pongono in forse la correttezza della curva ellittica quale rappresentazione grafica delle soluzioni: resta soltanto da capire il perché... ed i “perché” giacciono alle radici delle questioni.

Si ritorna allora alle basi della teoria della “geometria delle masse” dove dai vecchi testi, impolverati ma sempre ottimi e validi, rispuntano le seguenti espressioni (*):

$$J_{x_1} = J_x \cos^2 \alpha - 2J_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + J_y \sin^2 \alpha \quad (1)$$

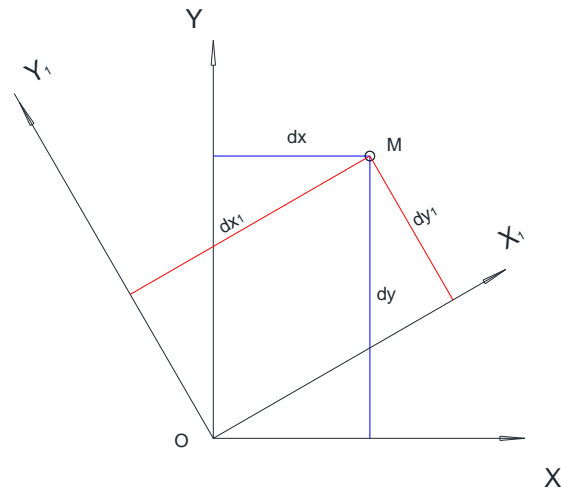
$$J_{y_1} = J_y \cos^2 \alpha + 2J_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + J_x \sin^2 \alpha \quad (2)$$

Questi sono i momenti di inerzia espressi relativamente ad assi generici X_1 ed Y_1 inclinati di un generico angolo α .

Ed inoltre:

$$J_{x_1 y_1} = (J_x - J_y) \sin \alpha \cos \alpha + J_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (3)$$

Questa rappresenta il momento centrifugo rispetto agli assi generici X_1 ed Y_1 inclinati di un generico angolo α .



Se sommo la (1) e la (2) ottengo:

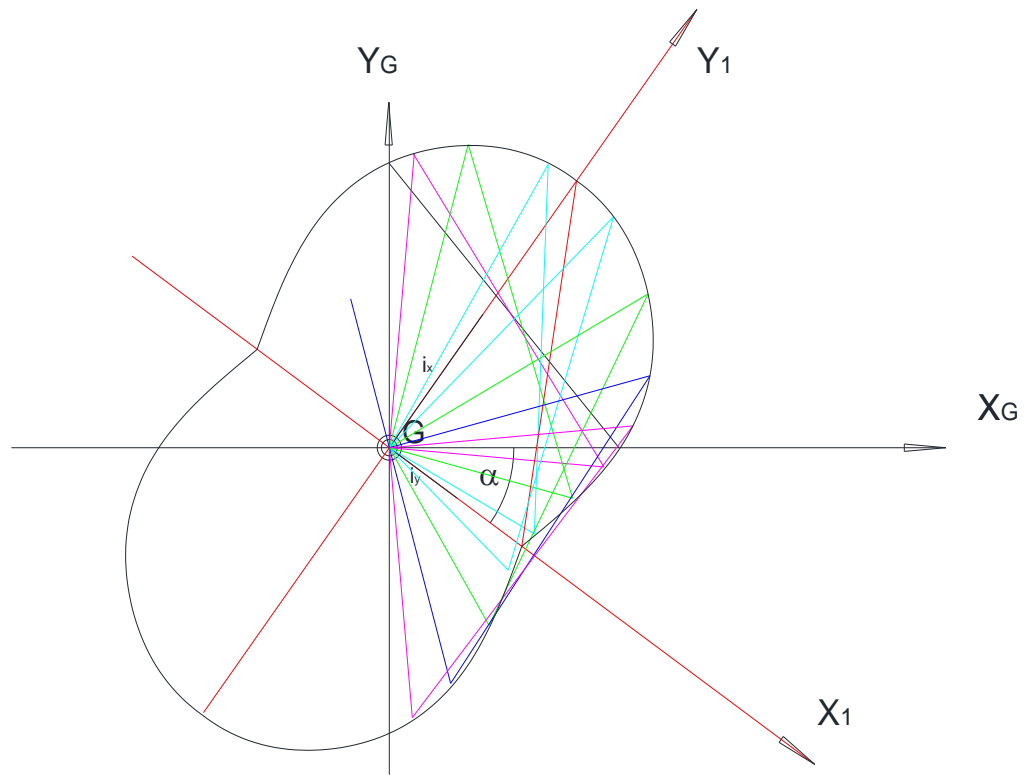
$$Jx_1 + Jy_2 = Jx (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + Jy (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = Jx + Jy$$

Ciò indica che **la somma dei momenti di inerzia non varia al variare dell'angolo α**

(*) ad esempio: O.Belluzzi, Scienza delle Costruzioni vol.1 pag 96; U.Alasia Costruzioni vol.1 pag 133.

Ma se questo è vero, anche la somma dei raggi al quadrato non varia e dunque anche la congiungente (ipotenusa) resta costante.

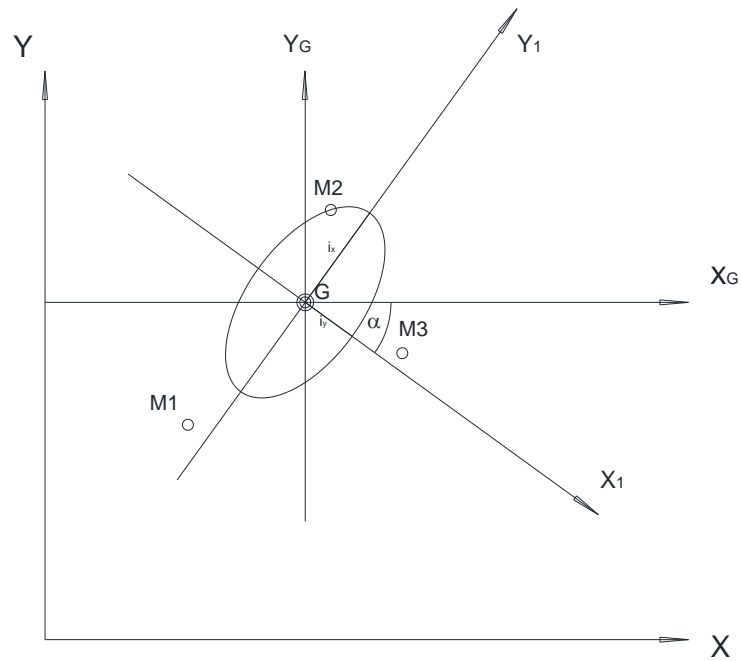
Ricostruendo il concetto graficamente, risulta che le coppie di raggi ortogonali tra loro, (con ipotenusa costante), ruotando generano una curva **diversa da un ellisse**, leggermente "strozzata" presso i valori minimi.



LA CONFERMA

La conferma esige un'applicazione pratica con i numeri, in modo da ottenere un risultato più preciso e rigoroso: si ricorre pertanto allo svolgimento di un esempio numerico

Si prende un sistema composto da tre masse e attraverso la seguente tabella si riportano forze, posizioni, momenti statici, posizione del baricentro, momenti di inerzia e raggi giratori.



forze	dx	dy	F	Sy	Sx	dx _G	dy _G	Jy _G	Jx _G	Jx _G y _G
M1	2	3	4	8	12	-1,64	-1.71	10.76	11.70	11.22
M2	4	6	7	28	42	0.36	1.29	0.91	11.65	3.25
M3	5	4	3	15	12	1.36	-0.71	5.55	1.51	-2.90
G	3.64	4.71	14	51	66	/	/	17.22	24.86	11.57
X ₁ Y ₁								8.86	33.22	0
i								0.81	1.54	

Procediamo con la costruzione di una tabella che valuti il variare delle componenti inerziali, secondo angoli sequenziali (0°, 5°, 15°...90°)

Applicando volta per volta il valore dell'angolo alle formule (1), (2) e (3) si ottengono i seguenti risultati.

Le caselle evidenziate riportano i valori comuni con la prima tabella (l'angolo 35°,86 costituisce l'angolo per il quale i valori dei raggi sono minimo e massimo).

α°	F	Jx_1	Jy_1	Jx_1y_1	ix_1	iy_1	$ix_1^2+iy_1^2$	$\sqrt{ix_1^2+iy_1^2}$
0	14	24,86	17.22	11.57	1.33	1.11	3.001	1.73
5	14	26.80	15.28	10.73	1.38	1.04	2.990	1.73
15	14	30.13	11.95	8.11	1.47	0.93	3.008	1.73
30	14	32.97	9.11	2.48	1.53	0.82	2.997	1.73
35,86	14	33.22	8.86	0	1,54	0.81	3.009	1.73
45	14	32.61	9.47	-3.82	1.53	0.82	3.010	1.73
60	14	29.15	12.93	-9.09	1.44	0.96	2.997	1.73
75	14	23.52	18.56	-11.93	1.30	1.15	3.009	1.73
85	14	19.29	22.79.	-12.05	1.17	1.28	2.998	1.73
90	14	17.22	24.86	-11.57	1.11	1.33	3.001	1.73

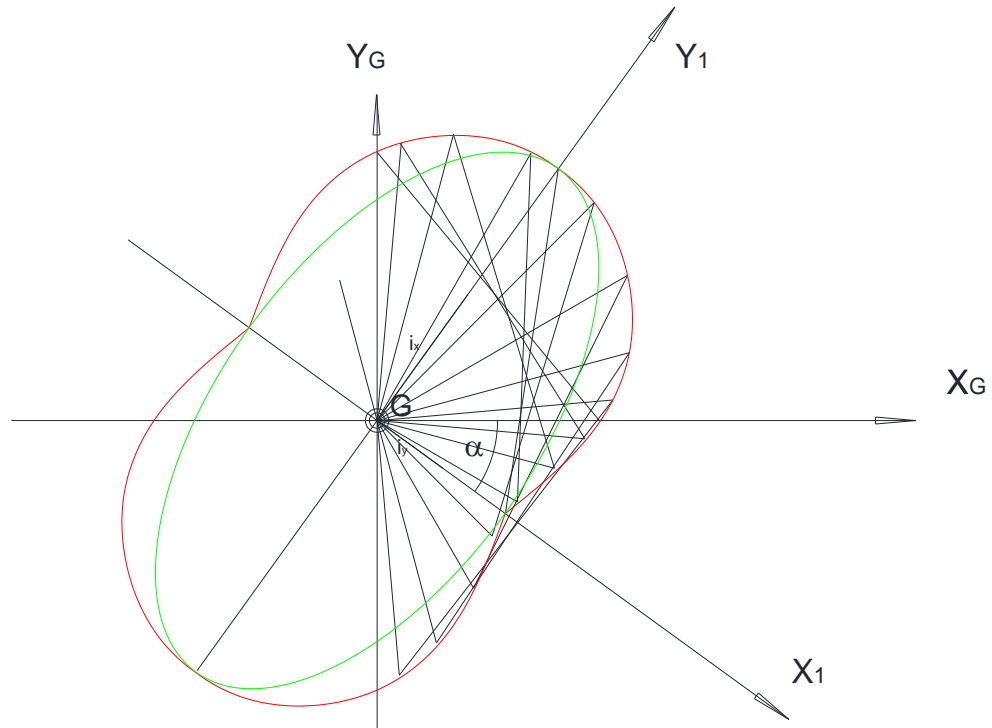
L'ultima colonna riporta un valore costante: tale è il valore della distanza tra le coppie di punti individuati dai raggi giratori.

In sostanza, al variare dell'angolo osserviamo facilmente che un raggio cresce e l'altro decresce e ciò accade fino a che gli assi baricentrici si sovrappongono agli assi principali, dopo di che vi è inversione di tendenza e ad il completamento di un quadrante i valori si scambiano.

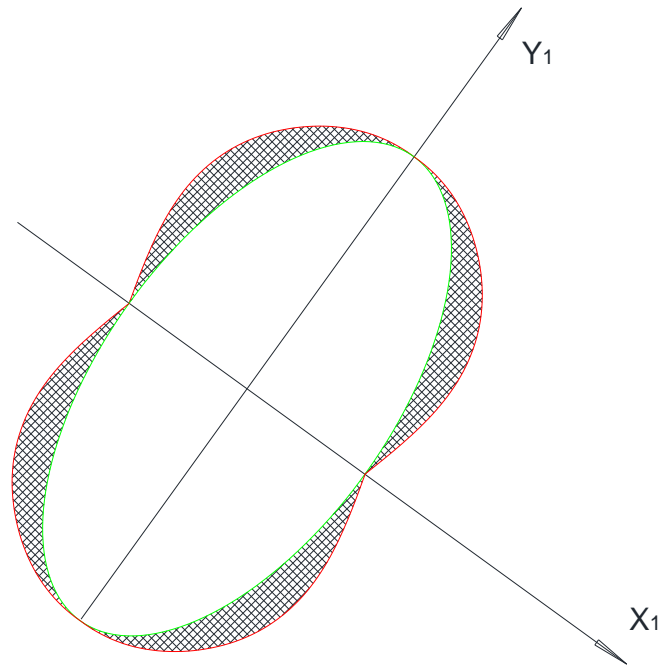
Ciò che resta costante è soltanto la distanza tra le coppie di punti che descrivono la curva.

Se riportiamo tali valori su di un grafico, scaturisce una curva chiusa che **non è un ellisse**, ma si evolve seguendo una legge simile: la chiameremo per adesso *curva correttiva*.

Si osserva facilmente che **ellisse** e **curva correttiva** hanno in comune i valori limite: raggi giratori massimo e minimo.



L'ampiezza della *curva correttiva* eccede parzialmente l'ingombro dell'ellissi , contenendolo.



A questo punto non resta che studiare analiticamente la curva correttiva, in modo da renderla riconoscibile attraverso una specifica equazione.

LO STUDIO DELLA CURVA CORRETTIVA

Riprendiamo l'equazione in coordinate polari:

in sostanza si prende in esame l'equazione (1), la si divide per la sommatoria delle masse e la si pone sotto radice quadrata, proprio per ricavare il valore del raggio giratore di inerzia:

$$R = \sqrt{(J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - 2J_{xy} \sin \alpha \cos \alpha) / k}$$

La possiamo scrivere come:

$$R^2 = (a \cos^2 \alpha + b \sin^2 \alpha - c \sin \alpha \cos \alpha) / d \quad (4)$$

$$\text{con } a = J_x \quad b = J_y \quad c = 2J_{xy} \quad d = \Sigma m$$

Si pone : $X = R \times \cos \alpha$ $Y = R \times \sin \alpha$ da cui:

$$\cos^2 \alpha = (X/R)^2 \quad \sin^2 \alpha = (Y/R)^2 \quad \sin \alpha \cos \alpha = XY/R^2 \quad X^2 + Y^2 = R^2$$

la (4) diventa:

$$X^2 + Y^2 = [a \times X^2 / (X^2 + Y^2) + b \times Y^2 / (X^2 + Y^2) - c \times XY / (X^2 + Y^2)] / d$$

e quindi:

$$(X^2 + Y^2)^2 = (a X^2 + b Y^2 - c X Y) / d \quad (5)$$

ponendo:

$$\alpha = a / d \quad \beta = b / d \quad \delta = c / d$$

si ha l'equazione canonica:

$$(X^2 + Y^2)^2 = \alpha X^2 + \beta Y^2 - \delta X Y$$

Trattasi di una "quartica" che rimanda al titolo della trattazione : QUARTICA DI CULMANN

IL DISEGNO DELLA CURVA CON “MATHEMATICA”

Si riscrive la (5):

$$(X^2 + Y^2)^2 = \alpha X^2 + \beta Y^2 - \delta XY$$

Riprendendo i dati del precedente esercizio con:

$$\alpha = a / d = 24,86 / 14 = 1,775$$

$$\beta = b / d = 17,22 / 14 = 1,230$$

$$\delta = c / d = 2 \times (-11,57) / 14 = - 1,652$$

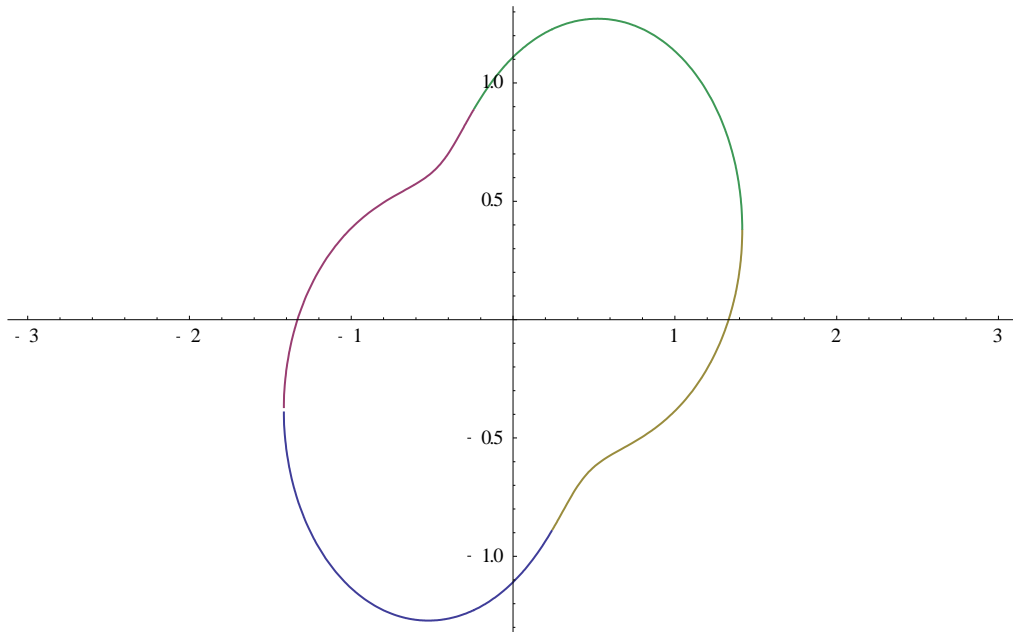
La (5) diventa:

$$(X^2 + Y^2)^2 = 1,775 X^2 + 1,230 Y^2 + 1,652 XY$$

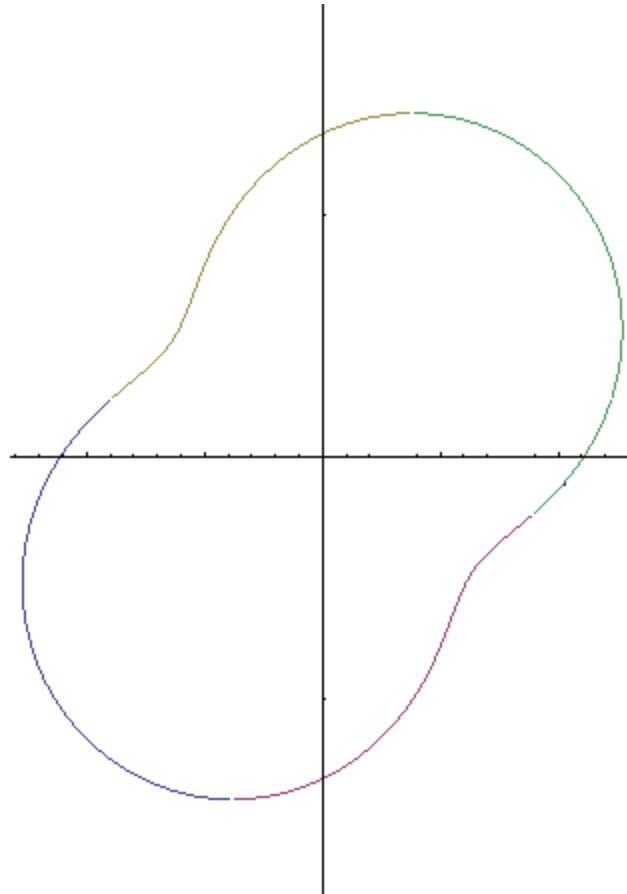
```
In[1]:= sol4=Solve[(x^2+y^2)^2-1.775*x^2-1.230*y^2-1.652*x*y==0,{x,y}];
```

```
In[1]:= Plot[{sol4[[1,1,2]],sol4[[2,1,2]],sol4[[3,1,2]],sol4[[4,1,2]]},{x,-3,3}]
```

```
Out[2]:=
```



Out [3] :=



LE CONCLUSIONI

La **quartica** e l'**ellisse** sono curve molto simili e dunque da un punto di vista pratico (ingegneristico) non vi sono grosse differenze e generalmente i valori utilizzati sono appunto quelli limite – comuni ad entrambe e figure- ma da un punto di vista matematico la differenza è tangibile e soprattutto concettuale.

Spero che il contributo -si badi bene, modesto ed in punta di piedi- possa nell'era dell'informatica avviare, da parte degli esperti, procedimenti di calcolo più esatti, avvicinando ancor di più la teoria agli effetti reali e pragmatici dell'ingegneria moderna, dando il via ad un "revisionismo" su una materia le cui basi sono rimaste intatte da svariati decenni.

Quanto proposto ha, quanto meno, una sicura positiva ricaduta sulla didattica, che oggi può avvalersi di validissimi software come "MATHEMATICA" per il calcolo, per il disegno analitico digitale e per un'ottima "comunicazione" (divulgazione, interfacciabilità, ecc)

Anche se gli effetti "utili alla pratica" sono marginali, si apre, da un punto di vista teorico un nuovo approccio al calcolo che può creare, come spero, dibattiti nuovi su argomenti da troppo tempo cristallizzati.

Grazie per l'attenzione

Angelo Vigorita

P.S.

...ma se Culmann avesse avuto a disposizione il software MATHEMATICA???

...beh sicuramente la QUARTICA se la sarebbe trovata da solo!!!

LA BIBLIOGRAFIA

K. Culmann, Die graphische Statik, Zurigo 1865.

A.Galli: Geometria delle Masse . 1953

V.Franciosi: Scienza delle Costruzioni v.2, Napoli 1969

O. Belluzzi : Scienza delle Costruzioni, vol 1, Bologna 1971

L.Boscotrecase – A.Di Tommaso: Statica applicata alla costruzioni, Bari 1983

U.Alasia : Corso di Costruzioni, vol 1, Torino 1998